

Gruppenübung 3

Aufgabe 1 Untersuchen Sie die Stabilität der Ruhelage $(0,0)$ des Systems

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= -x_1 + x_2^2 \\ \dot{x}_2 &= -x_2^3 - x_1 x_2\end{aligned}\quad (1)$$

mit Hilfe der Funktion $V(x) = \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2)$. Welche Aussage lässt sich mittels der Linearisierungsmethode treffen?

Lösung:

Um die Stabilität des Ursprungs nachzuweisen, müssen unterschiedliche Dinge überprüft werden

- $\dot{V}(x) \leq 0$ für Stabilität
- $\dot{V}(x) < 0$ für asymptotische Stabilität

Aus $V(x) = \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2)$ ergibt sich für die Zeitableitung entlang des Vektorfelds $\dot{x} = f(x)$

$$\dot{V}(x) = x_1 \dot{x}_1 + x_2 \dot{x}_2 = x_1(-x_1 + x_2^2) + x_2(-x_2^3 - x_1 x_2) = -(x_1^2 + x_2^4),$$

d.h. $\dot{V}$ ist negativ definit. Daraus folgt, dass die Ruhelage im Ursprung asymptotisch stabil ist. Da V auch radial unbeschränkt ist, ist die Ruhelage auch global asymptotisch stabil.

Nun überprüft man, ob es möglich wäre durch eine Linearisierung Aussagen über die Ruhelage treffen zu können. Die Linearisierung des Systems (1) an der Ruhelage $(0,0)$ ist gegeben durch

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} x.$$

Die Linearisierung hat die Eigenwerte $\lambda_1 = -1$ und $\lambda_2 = 0$. Damit lässt sich mit der Linearisierung keine Aussage über die Stabilität treffen. Das Vektorfeld und die Höhenlinien der Lyapunovfunktion sind in Abbildung 1 dargestellt.

Aufgabe 2 Zeigen Sie mit Hilfe der Funktion $V(x) = \frac{1}{2}(x_1^2 - x_2^2)$ und dem Satz von Tschetajew, dass die Ruhelage $(0,0)$ der folgenden Systeme instabil ist. Welche Aussage lässt sich mittels der Linearisierungsmethode treffen?

a)

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 + x_1^3 \\ \dot{x}_2 &= x_1 + x_1^2 x_2\end{aligned}\quad (2)$$

Lösung:

Nach dem Satz von Tschetajew muss nachgewiesen werden, dass es eine Umgebung U der Ruhelage 0 und eine Menge $\Omega \subset U$ gibt für den folgendes gilt:

- $0 \in \partial\Omega$, d.h. 0 liegt auf dem Rand von Ω .
- Es gibt eine Funktion $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, mit $V(0) = 0$, V positiv und nicht unbeschränkt auf Ω , $\dot{V}|_{x=0} = 0$ und $\dot{V}$ positiv auf Ω ist.

Die Berechnung von $\dot{V}$ ergibt

$$\begin{aligned}\dot{V}(x) &= x_1 \dot{x}_1 - x_2 \dot{x}_2 = x_1(x_2 + x_1^3) - x_2(x_1 + x_1^2 x_2) \\ &= -x_1^4 - x_1^2 x_2^2 = x_1^2(x_1^2 - x_2^2).\end{aligned}$$

Damit ist V und $\dot{V} > 0$ für $x_1^2 > x_2^2$, d.h. die Menge Ω die gegeben ist durch

$$\Omega = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1^2 > x_2^2, x_1^2 + x_2^2 \leq c\},$$

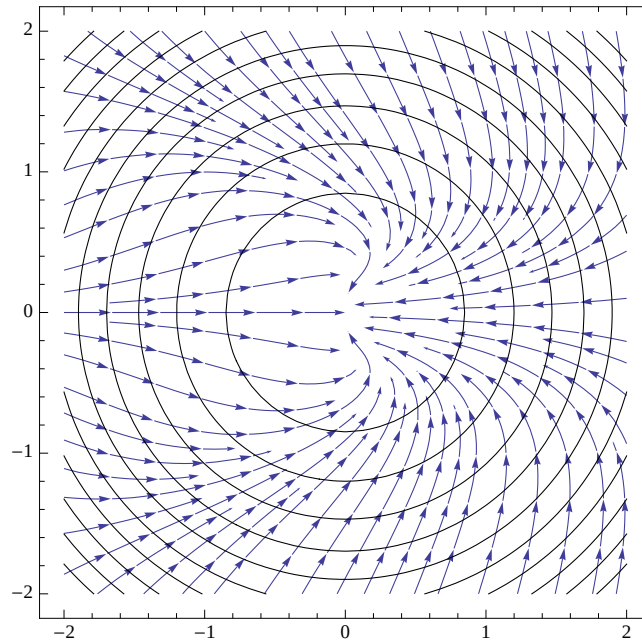


Abbildung 1: Vektorfeld A2

für ein $c > 0$, erfüllt alle Bedingungen von Chetaevs Theorem und damit ist der Ursprung instabil. Die Linearisierung des Systems (2) an der Ruhelage $(0,0)$ ist gegeben durch

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} x.$$

Daraus ergeben sich die Eigenwerte $\lambda_1 = 1$ und $\lambda_2 = -1$. Somit ist die Ruhelage $(0,0)$ instabil.

b)

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_1^3 - 3x_1x_2^2 \\ \dot{x}_2 &= -x_2^3 - x_1^2x_2. \end{aligned} \quad (3)$$

Lösung:

Nun wird wieder mit dem Satz von Tschatejew argumentiert. Berechnung von $\dot{V}(x)$

$$\begin{aligned} \dot{V}(x) &= x_1\dot{x}_1 - x_2\dot{x}_2 \\ &= x_1(x_1^3 - 3x_1x_2^2) - x_2(-x_2^3 - x_1^2x_2) \\ &= x_1^4 - 3x_1^2x_2^2 + x_2^4 + x_1^2x_2^2 = x_1^4 - 2x_1^2x_2^2 + x_2^4 \\ &= (x_1^2 - x_2^2)^2. \end{aligned}$$

D.h. $V(0) = 0$, $\dot{V}|_{x=0} = 0$, $V > 0$ und $\dot{V} > 0$ für alle $x_1^2 > x_2^2$. Somit ist der Satz von Chetaev erfüllt und damit ist $(0,0)$ eine instabile Ruhelage.

Die Linearisierung des Systems (3) an der Ruhelage $(0,0)$ ist gegeben durch

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} x.$$

Es sind keine Aussagen durch die Linearisierung möglich, da das System beide Eigenwerte bei Null hat.

Aufgabe 3 Zeigen Sie mit Hilfe der Lyapunovfunktion $V(x) = \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2)$ und des LaSalle'schen Invarianzprinzips, dass die Ruhelage $(0,0)$ des Systems

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -x_1 + x_2^2 - x_1x_2 \\ \dot{x}_2 &= x_1^2 - x_1x_2 \end{aligned} \quad (4)$$

global asymptotisch stabil ist. Welche Aussage lässt sich mittels der Linearisierungsmethode treffen?

Lösung:

Das LaSalle'sche Invarianzprinzip verlangt, dass V positiv definit und radial unbeschränkt und $\dot{V}$ negativ semidefinit ist. Falls jetzt keine nichttriviale Lösung $\phi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ des Systems existiert, die identisch in $Z = \{x \in \mathbb{R}^n | \dot{V}(x) = 0\}$ verläuft, dann ist die Ruhelage $(0,0)$ global asymptotisch stabil.

Offensichtlich ist V mit $V(x) = \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2)$ positiv definit und radial unbeschränkt. Die Definitheit von $\dot{V}$ muss überprüft werden. Es gilt

$$\dot{V}(x_1, x_2) = x_1 \dot{x}_1 + x_2 \dot{x}_2 = x_1(-x_1 + x_2^2 - x_1 x_2) + x_2(x_1^2 - x_1 x_2) = -x_1^2.$$

Damit ist $\dot{V}$ negativ semidefinit. Es bleibt die Frage nach der Existenz einer nichttrivialen Lösung zu klären. Also muss überprüft werden ob $Z = \{x \in \mathbb{R}^2 | \dot{V}(x_1, x_2) = -x_1^2 = 0\}$ eine nichttriviale Lösung enthält.

Aus $\dot{V}(x_1, x_2) = -x_1^2 \equiv 0$ folgt unmittelbar $x_1 \equiv 0$. Durch einmaliges Differenzieren ergibt sich $0 \equiv \dot{x}_1 = -x_1 + x_2^2 - x_1 x_2$, also $x_2^2 \equiv 0$. Somit existiert nur die triviale Lösung und nach dem Theorem ist die Ruhelage $(0,0)$ eine global asymptotisch stabile Ruhelage.

Die Linearisierung des Systems (4) an der Ruhelage $(0,0)$ ist gegeben durch

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} x.$$

Es sind keine Aussagen durch die Linearisierung möglich, da das System einen Eigenwert bei Null hat.

Aufgabe 4 Gegeben sei das System

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -x_1 - 3x_2^2 \\ \dot{x}_2 &= x_1 x_2 - x_2^3. \end{aligned} \quad (5)$$

- a) Was kann man mit Hilfe der Linearisierungsmethode von Lyapunov über die Stabilität der Ruhelage $(0,0)$ aussagen?

Lösung:

Die Linearisierung des Systems (5) an der Ruhelage $(0,0)$ ist gegeben durch

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} x.$$

Dabei handelt es sich um das selbe linearisierte System wie in Aufgabe 3. Dadurch, dass ein Eigenwert $\lambda_1 = 0$ ist, ist keine Aussage möglich.

- b) Zeigen Sie, dass $V_1(x) = \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2)$ eine Lyapunovfunktion für die Ruhelage $(0,0)$ von (5) ist.

Lösung:

Für die Ableitung von V_1 entlang des Vektorfelds ergibt sich

$$\dot{V}_1(x_1, x_2) = x_1 \dot{x}_1 + x_2 \dot{x}_2 = x_1(-x_1^3 x_2^2) + x_2(x_1 x_2 - x_2^3) = -(x_1 + x_2^2)^2.$$

Damit ist $\dot{V}_1$ negativ semidefinit.

- c) Zeigen Sie mit Hilfe des LaSalle'schen Invarianzprinzips und der Lyapunovfunktion V_1 , dass die Ruhelage $(0,0)$ des gegebenen Systems global asymptotisch stabil ist.

Lösung:

Gemäß b) gilt

$$\dot{V}_1(x_1, x_2) = -(x_1 + x_2^2)^2.$$

Nun wird untersucht ob es eine nichttriviale Lösung ϕ existiert die in $\dot{V}_1 = 0$ liegt, d.h. ob es eine Lösung gibt die $x_1(t) + x_2(t)^2 \equiv 0$ erfüllt. Damit muss $(x_1 + x_2^2) \equiv 0$ gelten. Daraus ergibt sich $(x_1 + x_2^2) = 0$ und

$$\frac{d}{dt}(x_1 + x_2^2) = \dot{x}_1 + 2x_2 \dot{x}_2 = -x_1 - 3x_2^2 + 2x_2^2 x_1 - 2x_2^4 \stackrel{x_1 = -x_2^2}{=} -2x_2^2 - 4x_2^4 = -2x_2^2(1 + 2x_2^2) \stackrel{!}{=} 0.$$

D.h. $x_2(t) \equiv 0$ und $x_1(t) \equiv 0$, sodass $\{x \in \mathbb{R}^2 | \dot{V}_1(x) = 0\}$ nur die triviale Lösung enthält. Nach dem Invarianzprinzip von LaSalle und der Tatsache, dass V_1 radial unbeschränkt ist, ist die Ruhelage global asymptotisch stabil.

- d) Zeigen Sie mit Hilfe der Lyapunovfunktion $V_2(x) = \frac{1}{2}(x_1^2 + 3x_2^2)$ dass die Ruhelage $(0,0)$ des gegebenen Systems global asymptotisch stabil ist.

Lösung:

$$\dot{V}_2(x) = x_1\dot{x}_1 + 3x_2\dot{x}_2 = x_1(-x_1 - 3x_2^2) + 3x_2(x_1x_2 - x_2^3) = -x_1^2 - 3x_2^4,$$

d.h. $\dot{V}$ ist negativ definit. Weil V auch radial unbeschränkt ist, ist die Ruhelage $(0,0)$ nach der zweiten Methode von Lyapunov global asymptotisch stabil.

Aufgabe 5 Betrachten Sie das nichtlineare System

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= -x_2 \\ \dot{x}_2 &= x_1 + (x_1^2 - 1)x_2\end{aligned}$$

und die quadratische Lyapunovfunktion

$$V(x) = \frac{1}{2}x_1^2 + \frac{1}{2}x_2^2.$$

Zeigen Sie, dass die Menge $E = \{x \in \mathbb{R}^2 : \|x\|_2 < 1\}$ zum Einzugsbereich des Ursprungs $x = [0 \ 0]^T$ gehört. Ist E der maximale Einzugsbereich?

Lösung:

Wir stellen fest, dass V positiv definit ist.

Die Lie-Ableitung der gegebenen Lyapunovfunktion $V(x)$ ergibt:

$$\begin{aligned}\dot{V}(x) &= \frac{\partial V}{\partial x_1}\dot{x}_1 + \frac{\partial V}{\partial x_2}\dot{x}_2 \\ &= -x_1x_2 + x_2(x_1 + (x_1^2 - 1)x_2) \\ &= x_2(x_1^2 - 1)x_2 \\ &= (x_1^2 - 1)x_2^2\end{aligned}$$

Wir betrachten jetzt die Menge $Z := \{x \in \mathbb{R}^2 : |x_1| \leq 1\}$. Auf dieser Menge Z gilt $\dot{V} \leq 0$, wobei $\dot{V} = 0$ für $|x_1| = 1$ oder $x_2 = 0$.

Sei jetzt E_c eine zusammenhängende, kompakte Untermenge von $\mathbb{R}^2$, die den Ursprung beinhaltet und deren Rand eine Höhenlinie (engl.: *level-set*) von $V(x)$ ist, d.h. $E_c = \{x \in \mathbb{R}^2 : V(x) \leq c\}$. Wenn $E_c \subset Z$, dann ist E_c invariant, d.h. wenn eine Lösung in E_c startet, dann verbleibt die Lösung in E_c (Es gilt $x(0) = x_0 \in E_c \Rightarrow x(t) \in E_c$ für alle $t \geq 0$). Dies folgt direkt daraus, dass $\dot{V}(x) \leq 0$ in Z .

Im nächsten Schritt bestimmen wir den minimalen Wert von $V(x)$ auf dem Rand von Z . Da Z einen "Schlauch" um die x_2 -Achse darstellt und die Höhenlinien von $V(x)$ konzentrische Kreise um den Ursprung darstellen (siehe Skizze), erhalten wir

$$\min_{x \in \partial Z} V(x) = V([1 \ 0]^T) = V([-1 \ 0]^T) = 0.5.$$

Wir folgern, dass wir für $c = 0.5$ die größte Menge $E_c \subset Z$ erhalten. Dabei können wir $E_{0.5}$ auch mit der Norm von x charakterisieren:

$$E_{0.5} = \{x \in \mathbb{R}^2 : V(x) \leq 0.5\} = \{x \in \mathbb{R}^2 : \|x\|_2 \leq 1\}$$

Da $\dot{V}$ auf E lediglich negativ semidefinit ist und nicht negativ definit, müssen wir als letzten Schritt das Invarianzprinzip von LaSalle anwenden. Hierbei gilt

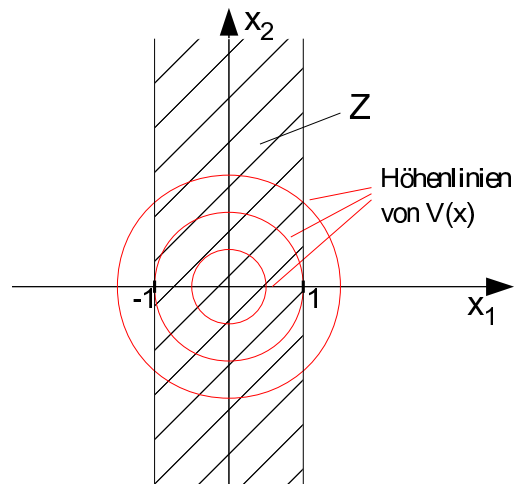
$$Y := \{x \in E_{0.5} : \dot{V} = 0\} = \{x \in E_{0.5} : x_2 = 0\},$$

da die Menge $\{x \in E_{0.5} : x_2 = 0\}$ auch die Punkte $[1 \ 0]^T$ und $[-1 \ 0]^T$ enthält.

Zu zeigen ist also, dass keine nichttriviale Trajektorie $x(t) \neq 0$ ($x(0) = x_0 \in \mathbb{R}^2$) existiert, die identisch in Y verläuft.

Sei jetzt also $x_2 = \dot{x}_2 = 0$, dann folgt

$$\dot{x}_2 = x_1 = 0.$$



D.h. die einzige Trajektorie, die identisch in Y verläuft, ist die triviale Trajektorie $x(t) \equiv 0$.
 Damit folgern wir mit dem Invarianzprinzip von LaSalle, dass für $x(0) = x_0 \in E_{0.5}$, $x(t) \rightarrow 0$ für $t \rightarrow \infty$.
 Somit gehört $E_{0.5}$ und damit auch $E = \{x \in \mathbb{R}^2 : \|x\|_2 < 1\} \subset E_{0.5}$ zum Einzugsbereich des Ursprungs.

Damit ist E nicht der maximale Einzugsbereich des Ursprungs, da $E \subset E_{0.5}$ und $E \neq E_{0.5}$. Auch über $E_{0.5}$ können wir allerdings nicht sagen, dass es der maximale Einzugsbereich des Ursprungs ist, da wir mit einer Lyapunovfunktion nur eine Menge bestimmen, die zum Einzugsbereich hinzugehört.